TS	Devoir surveillé N°1	Lundi 30/09/19

Nom et Prénom :……….

La Coupe du monde de rugby à XV 2019 a lieu au Japon, du 20 septembre au 2 novembre 2019. Il s'agit de la neuvième édition de cette compétition disputée tous les quatre ans depuis 1987, mais de la toute première organisée en Asie.
Ne pouvant assister aux différents matchs, vous allez étudier les subtilités de ce sport.

LE RUGBY, SPORT DE CONTACT ET D'ÉVITEMENT

Le rugby est un sport d'équipe qui s'est développé dans les pays anglo-saxons à la fin du XIXème siècle.
Pour simplifier l'étude, les joueurs et le ballon seront supposés ponctuels.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

I. Le rugby, sport de contact (3,25 points)

Document 1 : le plaquage

Il y a « plaquage » lorsqu'un joueur porteur du ballon, sur ses pieds dans le champ de jeu, est simultanément tenu par un ou plusieurs adversaires, qu'il est mis au sol et/ou que le ballon touche le sol. Ce joueur est appelé « joueur plaqué ».

D'après http://www.francerugby.fr/

Un joueur A de masse m_A = 115 kg et animé d'une vitesse v_A= 5,0 m/s est plaqué par un joueur B de masse m_B = 110 kg et de vitesse négligeable. . On suppose que les deux joueurs restent liés après l'impact et tombent à la vitesse v au sol.

1. Dans quel référentiel les vitesses sont-elles définies ? 0,25

2. On suppose que le système {joueur A + joueur B} est un système isolé.

a/ Exprimer les vecteurs quantité de mouvement du système avant et après le choc. 1,5

b/ En faisant apparaitre votre démarche, exprimer puis calculer la vitesse v des deux joueurs liés après l'impact puis calculer sa valeur. 1,5

II. Le rugby, sport d'évitement.

Document 2 : La chandelle

Au rugby, une « chandelle » désigne un coup de pied permettant d'envoyer le ballon en hauteur par-dessus la ligne de défense adverse. L'objectif pour l'auteur de cette action est d'être au point de chute pour récupérer le ballon derrière le rideau défensif.

D'après http://www.francerugby.fr/

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Le champ de pesanteur terrestre est considéré uniforme, de valeur g = 9,81 m.s^{-2}.
On négligera toutes les actions dues à l'air.
Le joueur A est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vecteur vitesse $\vec{v}_1$.
Afin d'éviter un plaquage, il réalise une chandelle au-dessus de son adversaire.

On définit un repère (O, x, y) :

- O origine : position initiale du ballon considéré étant au sol ;
- x de même direction et de même sens que $\vec{v}_1$;
- y vertical et vers le haut.

A. Étude de la chronophotographie du ballon (5 points)

Le document N°3 en annexe représente la trajectoire du ballon dans le repère choisi.

L'intervalle de temps entre points est : τ = 50 ms.

1. Tracer les vecteurs vitesses $\vec{v}_8$ et $\vec{v}_{10}$ sur le document N°3 de l'annexe en faisant apparaitre toute la démarche sur la copie. 2

   Echelle de représentation des vecteurs vitesse : 1,0 cm $\rightarrow$ 2,0 m/s 1

2. Tracer le vecteur accélération $\vec{a}_9$ en faisant apparaitre sa construction sur le document N°3 de l'annexe ainsi toute la démarche sur la copie. 1,5

   Echelle de représentation du vecteur accélération : 1,0 cm $\rightarrow$ 5,0 m/s^2 0,5

B. Étude dynamique du ballon (8,25 points)

À l'instant t = 0 s, le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ du ballon fait un angle α avec l'axe Ox.

Le modèle de la chute libre conduit aux équations horaires du mouvement du centre G du ballon dans le repère (O, x, y) :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}(\mathrm{t})\begin{pmatrix} \mathrm{x(t)} = \mathrm{v_0} \times \cos(\alpha) \times \mathrm{t} \\ \mathrm{y(t)} = -\dfrac{1}{2} \times \mathrm{g} \times \mathrm{t}^2 + \mathrm{v_0} \times \sin(\alpha) \times \mathrm{t} \end{pmatrix}$$

1. a/ Etablir les équations horaires du vecteur vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie du ballon. 1

   b/ Sachant que le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ a les coordonnées ci-dessous, en déduire sa norme. 0,5

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_x(t=0) = 5{,}00\ m.s^{-1} \\ v_{0y} = v_y(t=0) = 8{,}66\ m.s^{-1} \end{cases}$$

   c/ Le vecteur $\vec{v}_0$ fait un angle α avec l'horizontale. Exprimer l'angle α en fonction de v_0 puis calculer sa valeur. 0,75

2. a/ Etablir les équations horaires du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre d'inertie du ballon. 1

   b/ Les résultats sont-ils en accord avec le tracé de l'accélération de la question 1.2. ? 0,5

   c/ La deuxième loi de Newton est-elle vérifiée ? Justifier. 1,5

3. Montrer que le ballon suit une trajectoire parabolique d'équation : 1

$$\mathrm{y(x)} = -\frac{\mathrm{g}}{2 \times \mathrm{v_0^2} \times \cos^2(\alpha)} \times \mathrm{x}^2 + \tan(\alpha) \times \mathrm{x}$$

4. Le document N°4 en annexe rassemble les représentations graphiques de l'évolution dans le temps des grandeurs x, y, vx et vy, coordonnées des vecteurs position et vitesse du ballon. 2

   Écrire sous chaque courbe l'expression de la grandeur qui lui correspond et justifier.

C. Une « chandelle » réussie (3,5 points)

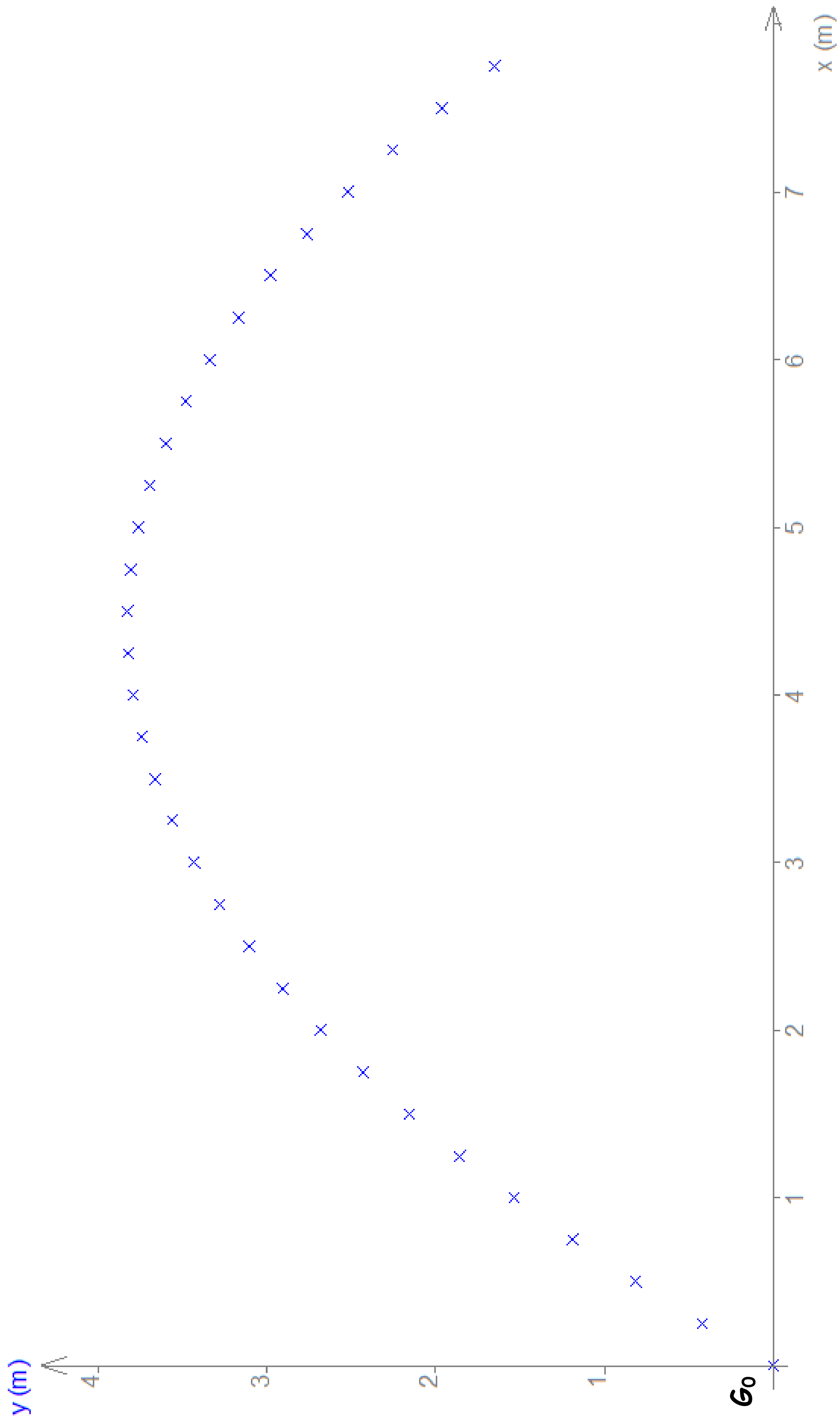
1. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse lorsque le ballon atteint son altitude maximale. En déduire la date t_{sommet} correspondante. Déterminer ensuite les coordonnées de sa position à cette date. 1,5

2. a/ Déterminer par le calcul le temps dont dispose le joueur pour récupérer le ballon avant que celui-ci ne touche le sol. 0,75

   b/ Vérifier la valeur obtenue en faisant clairement apparaître la réponse sur l'un des graphes du tableau du document N°4 de l'annexe. 0,5

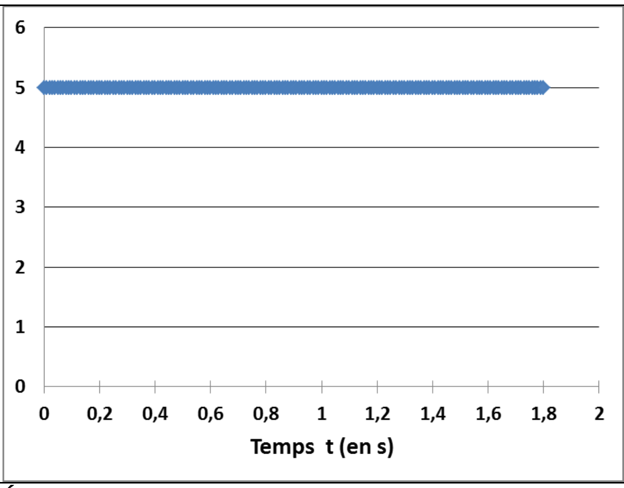
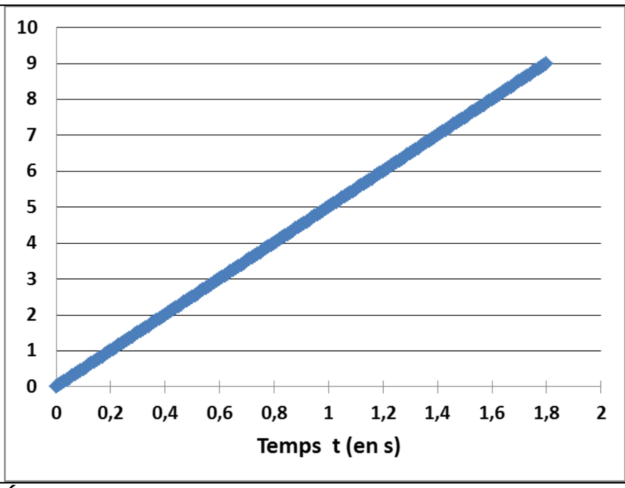
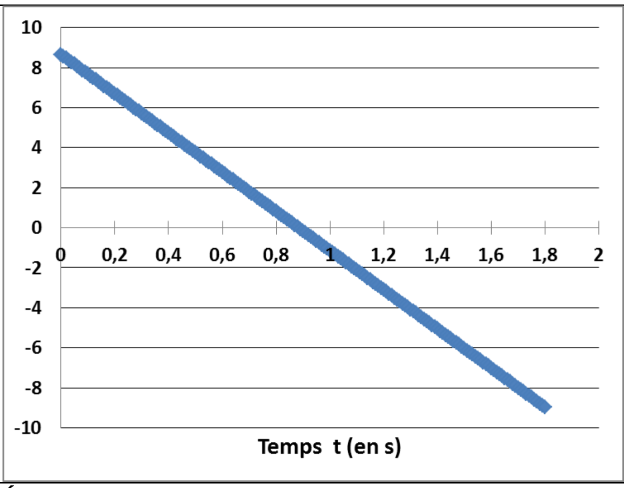
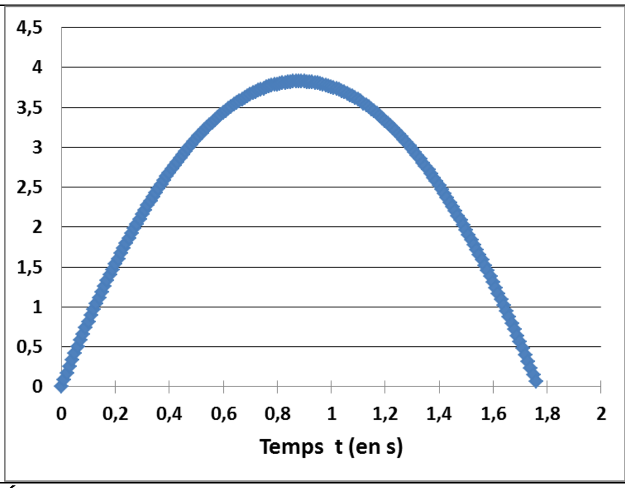
3. Déterminer de deux manières différentes la valeur de la vitesse v_1 du joueur pour que la chandelle soit réussie. 0,75

ANNEXE : Document N°3



ANNEXE : Document N°4

Tableau rassemblant les représentations graphiques de l'évolution dans le temps des grandeurs x, y, vx et vy.

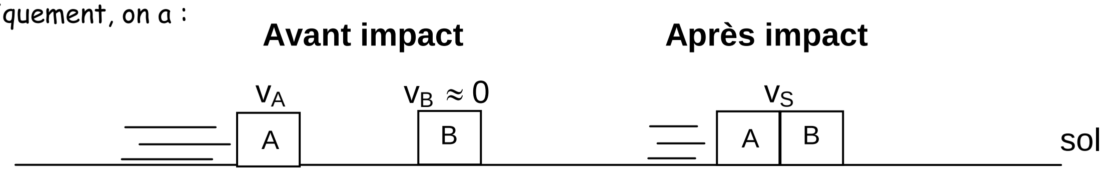
	
Équation : Justification :	Équation : Justification :
	
Équation : Justification :	Équation : Justification :

CORRECTION

Le rugby, sport de contact

1. Les vitesses sont définies dans le référentiel terrestre lié au sol.

2. Schématiquement, on a :



a/ Système : { joueur A + joueur B }

Événement : le choc entre les joueurs

Quantité de mouvement avant le choc :

$$\vec{p}_{avant}(système) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_{avant}(système) = m_A \times \vec{v}_A + m_B \times \vec{v}_B = m_A \times \vec{v}_A \quad car\ \vec{v}_B = \vec{0}$$

Quantité de mouvement après le choc :

$$\vec{p}_{après}(système) = (m_A + m_B) \times \vec{v}$$

b/ On considère le système comme pseudo-isolé, on peut donc utiliser la 1ère loi de Newton. ($\vec{p}(t) = \overrightarrow{cte}$)

On peut écrire :

$$\vec{p}_{avant}(système) = \vec{p}_{après}(système)$$

$$m_A \times \vec{v}_A = (m_A + m_B) \times \vec{v}$$

On projette les vecteurs vitesses sur l'axe (Ox) avec le vecteur unitaire $\vec{\imath}$, on a :

$$m_A \times v_A = (m_A + m_B) \times v$$

$$v = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A = 2{,}6\ m.s^{-1}$$

Le rugby, sport d'évitement.

A .Étude de la chronophotographie du ballon

1. échelle de distance : 7,0 cm → 21,0 m

Par définition,

$$\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}}{2\tau}$$

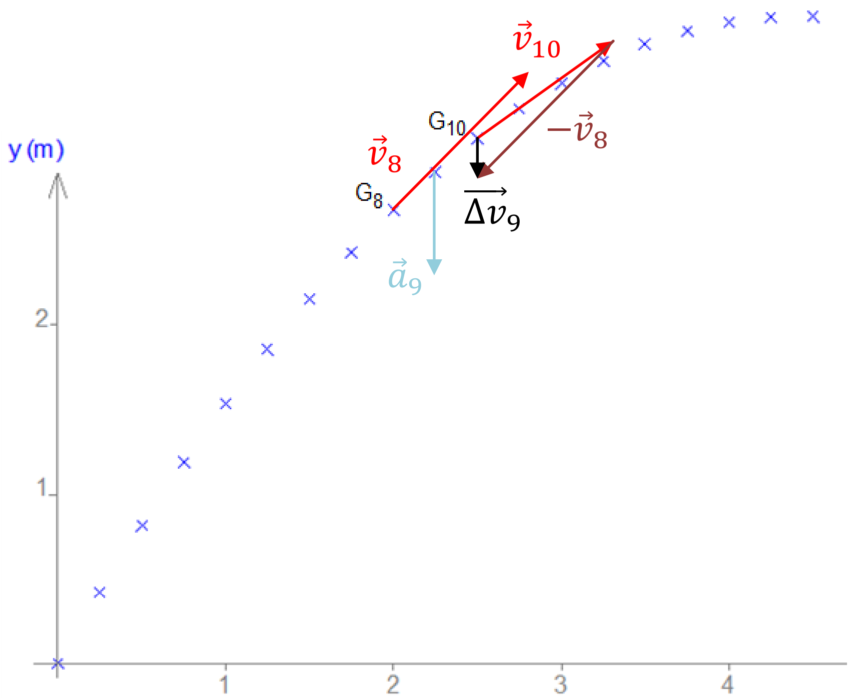
norme du vecteur variation de position au point G_8	norme du vecteur variation de position au point G_{10}
$G_7G_9 = \frac{2{,}1 \times 7{,}0}{21{,}0} = 0{,}70\ m$	$G_9G_{11} = \frac{1{,}9 \times 7{,}0}{21{,}0} = 0{,}63\ m$
norme du vecteur vitesse au point G_8	**norme du vecteur vitesse au point G_{10}**
$v_8 = \frac{G_7G_9}{2\tau} = \frac{0{,}70}{2 \times 50.10^{-3}} = 7{,}0\ m.s^{-1}$	$v_{10} = \frac{G_9G_{11}}{2\tau} = \frac{0{,}63}{2 \times 50.10^{-3}} = 6{,}3\ m.s^{-1}$
longueur du vecteur vitesse au point G_8	**longueur du vecteur vitesse au point G_{10}**
$\frac{7{,}0}{2{,}0} = 3{,}5\ cm$	$\frac{6{,}3}{2{,}0} = 3{,}1\ cm$

2. Par définition,

$$\vec{a}_9 = \frac{\Delta\vec{v}_9}{2\tau} = \frac{\vec{v}_{10} - \vec{v}_8}{2\tau}$$

On construit $\Delta\vec{v}_9 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_8$.

longueur du vecteur variation de vitesse au point G_9
0,5 cm
norme du vecteur variation de vitesse au point G_9
$\Delta v_9 = 0{,}5 \times 2{,}0 = 1{,}0\ m.s^{-1}$
norme du vecteur accélération au point G_9
$a_9 = \frac{\Delta v_9}{2\tau} = \frac{1{,}0}{2 \times 50.10^{-3}} = 10\ m.s^{-2}$
longueur du vecteur accélération au point G_9
$\frac{10}{5{,}0} = 2{,}0\ cm$



B. Étude dynamique du ballon

1. a/ On cherche les équations horaires de la vitesse (ou coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse) :

On sait que :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\left(\overrightarrow{OG}(t)\right)}{dt}$$

On peut écrire que :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{d\big(x(t)\big)}{dt} = v_0 \times cos(\alpha) \\ v_y(t) = \dfrac{d\big(y(t)\big)}{dt} = -g \times t + v_0 \times sin\,(\alpha) \end{cases}$$

b/ Norme du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{5{,}00^2 + 8{,}66^2} = 10{,}0\ m.s^{-1}$$

c/ Expression de l'angle α

$$v_{0x} = v_O \times \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v_{ox}}{v_0}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}0}{10{,}0}\right) = 60{,}0°$$

2. a/ On cherche les équations horaires de l'accélération (ou coordonnées cartésiennes du vecteur accélération) :

On sait que :

$$\vec{a}(t) = \frac{d(\vec{v}(t))}{dt}$$

On peut écrire que :

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{d(v_x(t))}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{d\left(v_y(t)\right)}{dt} = -g \end{cases}$$

b/ Comparaison du tracé et de l'étude théorique

tracé du vecteur accélération	étude théorique du vecteur accélération
direction verticale	coordonnées uniquement selon l'axe Oy
dirigé vers le bas	a_y est négatif
norme : 10 m/s²	norme : g=9,81 m/s²

c/ Vérification de la 2ème loi de Newton

Système : {ballon} (le ballon est assimilé à son centre d'inertie G)
Référentiel terrestre supposé galiléen
Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé constant

$$\vec{g}\begin{pmatrix} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{pmatrix}$$

Une seule force s'exerce sur le système :

- le poids du ballon : $\vec{P} = m \times \vec{g}$

$$\vec{P}\begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -m \times g \end{pmatrix}$$

Remarque : Les forces de frottement et la poussée d'Archimède sont négligées

<u>Application de la 2ème loi de Newton</u>

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Nous pouvons appliquer la 2ème loi de Newton (ou le principe fondamental de la dynamique)

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d(\vec{p}(t))}{dt} = \frac{d(m \times \vec{v}(t))}{dt}$$

La masse du système est constante donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \times \frac{d(\vec{v}(t))}{dt} = m \times \vec{a}(t)$$

or $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m \times \vec{g}$

donc $\vec{P} = m \times \vec{g} = m \times \vec{a}(t)$

soit $\boldsymbol{\vec{a}(t) = \vec{g}}$

$$\vec{a}(t)\begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{pmatrix}$$

L'étude précédente vérifie donc la 2ème loi de Newton.

3. Équation de la trajectoire

On sait que :

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t \end{pmatrix}$$

On pose :

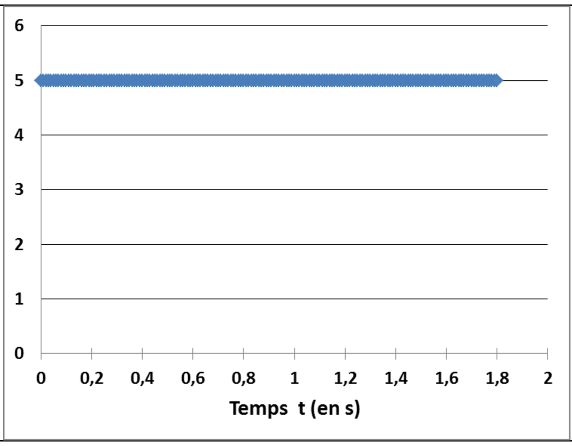
$$t = \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \times g \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}$$

$$y(x) = -\frac{g}{2 \times {v_0}^2 \times \cos^2(\alpha)} \times x^2 + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times x$$

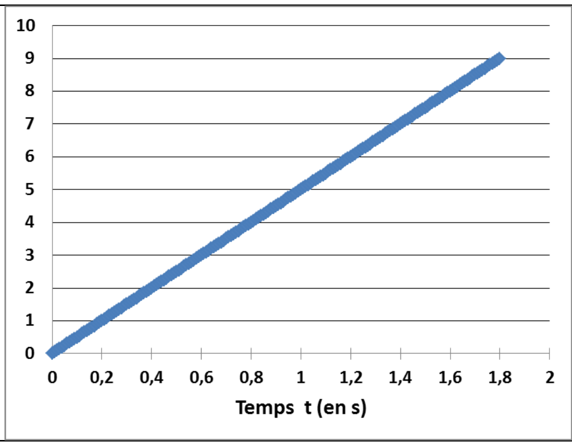
$$\mathbf{y(x) = -\frac{g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2(\alpha)} \times x^2 + \tan(\alpha) \times x}$$

4.



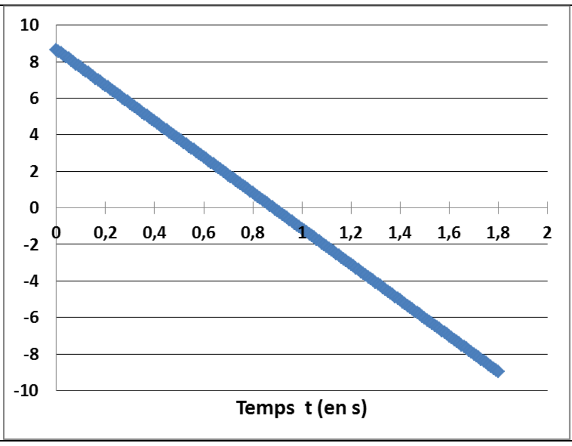
Équation : $\mathbf{v_x(t) = v_0.\cos\alpha}$

Justification :
le graphe est une droite horizontale. Seule la composante v_x est constante au cours du temps.



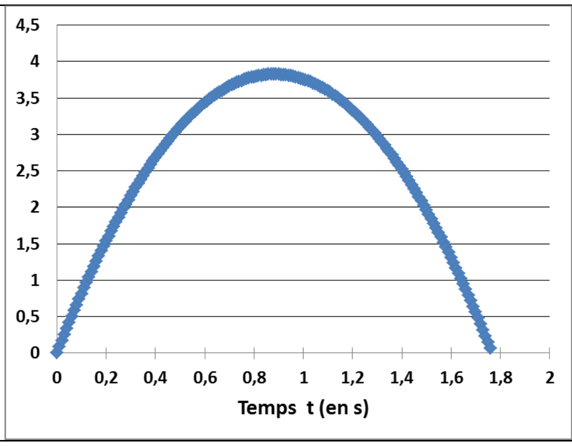
Équation : $\mathbf{x(t) = v_0.\cos\alpha.t}$

Justification :
le graphe est une droite passant par l'origine. Seule la composante x(t) est une fonction linéaire du temps.



Équation : $\mathbf{v_y(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha}$

Justification :
le graphe est une droite décroissante, donc son coefficient directeur est négatif. Seule la composante v_y est une fonction affine avec un coefficient directeur négatif (– g).



Équation : $\mathbf{y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t}$

Justification :
le graphe est une parabole de concavité tournée vers le bas. Seule la composante y(t) est une fonction parabolique du temps.

C. Une « chandelle » réussie

1. On cherche les coordonnées du vecteur vitesse quand la boule est à l'altitude maximale de sa trajectoire à la date t_{sommet}.

À cette date, le vecteur vitesse de la boule est horizontal ce qui implique :

$$\vec{v}(t_{sommet})\begin{cases} v_x(t_{sommet}) = v_0 \times cos(\alpha) \\ v_y(t_{sommet}) = -g \times t_{sommet} + v_0 \times sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$-g \times t_{sommet} + v_0 \times sin(\alpha) = 0$$

Alors

$$t_{sommet} = \frac{v_0 \times sin(\alpha)}{g} = \frac{10{,}0 \times sin(60)}{9{,}81} = 0{,}88\ s$$

$$\overrightarrow{OG}(t_{sommet})\begin{pmatrix} x(t_{sommet}) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t_{sommet} = 10{,}0 \times \cos(60) \times 0{,}88 = 4{,}4\ m \\ y(t_{sommet}) = -\frac{1}{2} \times g \times t_{sommet}^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t_{sommet} = -\frac{1}{2} \times 9{,}81 \times 0{,}50^2 + 10{,}0 \times \sin(60) \times 0{,}88 = 3{,}8\ m \end{pmatrix}$$

2.a/ Lorsque le ballon touche le sol, y(t) = 0 soit

$$y(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t = 0$$

donc

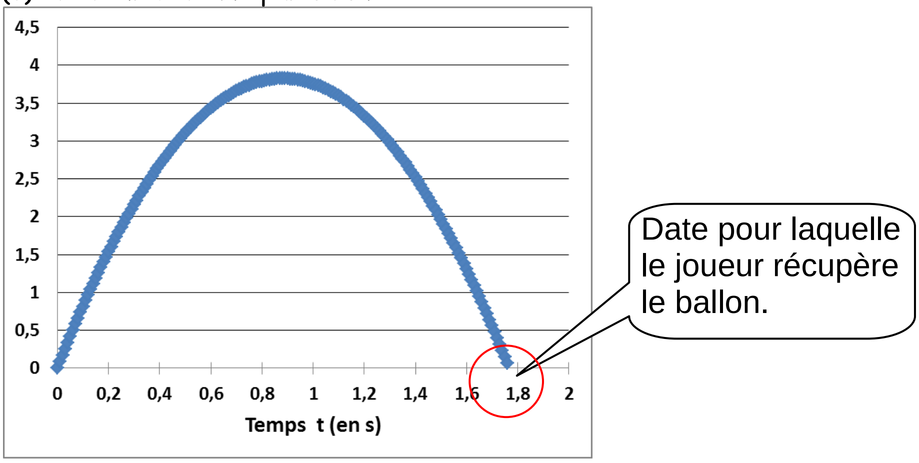
$$-\frac{1}{2} \times g \times t + v_0 \times \sin(\alpha) = 0$$

La solution t = 0 correspond au moment où le ballon est frappé par le rugbyman à l'origine du repère.
La date pour laquelle le joueur récupère le ballon :

$$t = \frac{2 \times v_0 \times \sin(\alpha)}{g}$$

$$t = \frac{2 \times 10{,}0 \times \sin(60)}{9{,}81} = 1{,}8\ s$$

b/ On vérifie bien sur le graphe y(t) la valeur obtenue par calcul :



3.Méthode 1 : pendant la durée t = 1,8 s du vol du ballon, le joueur parcourt la distance d = x(t= 1,8 s) :

$x(t) = v_0.\cos\alpha.t$

d = 10,0×cos(60)×1,8 = 9,0 m

La vitesse v_1 du joueur est alors : $v_1 = \frac{d}{t}$ soit : $v_1 = \frac{9{,}0}{1{,}8}$ = **5,0 m.s^{-1}**.

Méthode 2 : pour que la chandelle soit réussie, la vitesse v_1 du joueur doit être égale à la composante horizontale v_x de la vitesse du ballon soit :

$$v_1 = v_0.\cos\alpha$$

$$v_1 = 10{,}0\times\cos(60) = \mathbf{5{,}0\ m.s^{-1}}$$