TS	Devoir surveillé N°1	Vendredi 29/09/17

Nom et Prénom :……….

La pétanque

La pétanque est un jeu de boules dérivé du jeu provençal aussi appelé "la longue". Le but du jeu consiste tout simplement à lancer la boule le plus près possible du "but" matérialisé par le bouchon. Le terrain de jeu est horizontal.

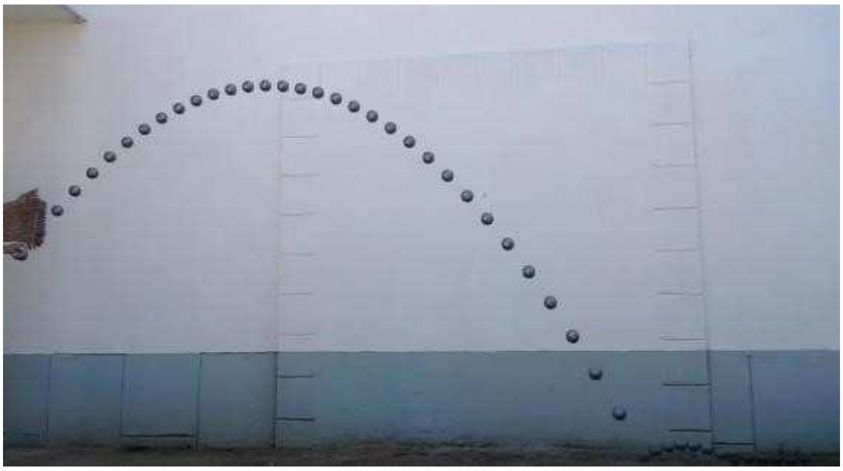
Au début d'une partie de pétanque, un joueur trace un cercle sur le sol, il se place dans ce cercle et lance le bouchon à une distance entre 6 et 10 mètres de ce cercle.

Les joueurs de pétanque ont le choix entre pointer c'est-a-dire tenter de placer leur boule plus près du but que l'adversaire ou tirer c'est-à-dire déplacer la boule adverse pour l'éloigner du "but" et remporter le point.

Les boules doivent avoir un diamètre compris entre 71 et 78 mm et une masse comprise entre 670 et 740 g.

D'après http://www.la boule bleue.fr

Cet exercice aborde l'étude d'un lancer d'une boule par un pointeur, puis par un tireur. Dans tout l'exercice, les frottements et la poussée d'Archimède seront négligés.



A. <u>Étude de la chronophotographie du pointeur</u> (5 points)

On filme le pointeur lançant sa boule de masse m = 710 g avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale.
On exploite la vidéo avec un logiciel de pointage pour obtenir la chronophotographie du lancer.
L'origine O est prise au point où le pointeur lâche la boule.
L'intervalle de temps entre points est : τ = 50 ms.

1. Tracer les vecteurs vitesses $\vec{v}_{12}$ et $\vec{v}_{14}$ sur le document N°1 de l'annexe en faisant apparaitre toute la démarche sur la copie. 2
   Echelle de représentation des vecteurs vitesse : 1,0 cm → 1,0 m/s 1

2. Tracer le vecteur accélération $\vec{a}_{13}$ en faisant apparaitre sa construction sur le document N°1 de l'annexe ainsi toute la démarche sur la copie. 1,5
   Echelle de représentation du vecteur accélération : 1,0 cm → 2,0 m/s^2 0,5

B. Étude dynamique du pointeur (9,5 points)

Le pointeur lance sa boule de masse m = 710 g avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale. L'origine O est prise au point où le pointeur lâche la boule. Le modèle de la chute libre conduit aux équations horaires du mouvement du centre G de la boule dans le repère (O, x, y) :

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t \end{pmatrix}$$

Donnée : intensité du champ de pesanteur sur Terre : g = 9,81 m.s^{-2}

1. a/ Établir les équations horaires du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du centre d'inertie de la boule de pétanque. 1

   b/ Sachant que le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ a les coordonnées ci-dessous, en déduire sa norme. 0,5

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_x(t=0) = 3{,}48\ m.s^{-1} \\ v_{0y} = v_y(t=0) = 3{,}86\ m.s^{-1} \end{cases}$$

   c/ Le vecteur $\vec{v}_0$ fait un angle α avec l'horizontale. Exprimer l'angle α en fonction de v_0 puis calculer sa valeur. 0,75

2. a/ Établir les équations horaires du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du centre d'inertie de la boule de pétanque. 1

   b/ Les résultats sont-ils en accord avec le tracé de l'accélération de la question A.2. ? Justifier. 0,75

   c/ La deuxième loi de Newton est-elle vérifiée ? Justifier. 1,5

3. Le pointeur lance une seconde boule en direction du bouchon et la lâche au point O origine du repère choisi. Le point O (origine du repère) est situé à une hauteur de 1,2 m du sol.
Pour un angle α de 51° et une vitesse initiale de valeur égale à 5,5 m.s^{-1}, la boule touche le sol au point d'impact I, puis roule vers le bouchon.
Remarque : Les équations horaires précédentes sont toujours vérifiées.

   a/ Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse lorsque la boule atteint son altitude maximale. En déduire la date t_{sommet} correspondante. Déterminer ensuite les coordonnées de sa position à cette date. 1,5

   b/ Montrer que la boule suit une trajectoire parabolique d'équation : 1

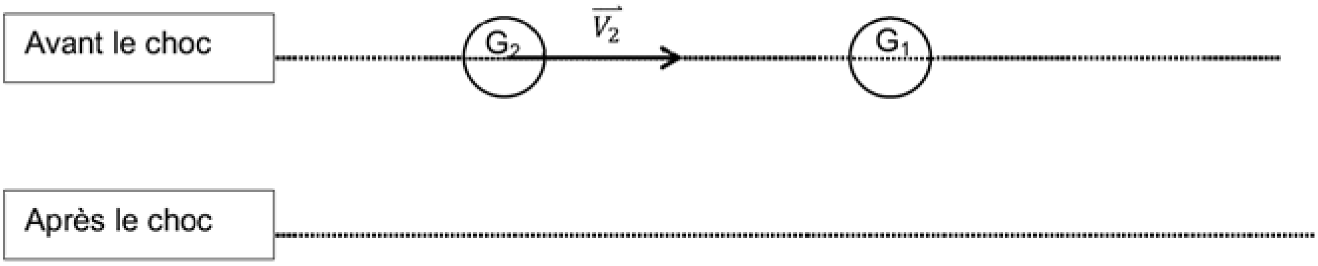
$$y(x) = -\frac{g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2(\alpha)} \times x^2 + \tan(\alpha) \times x$$

   c/ Déduire de l'expression précédente l'abscisse du point d'impact de la boule avec le sol. 1,5

C. <u>Le tireur</u> (5,5 points)

La boule G_1 lancée par le pointeur étant proche du bouchon, le tireur de l'équipe adverse va chercher à la déplacer. Le tireur lance sa boule G_2 à quelques centimètres de la boule visée ; la boule du tireur roule puis percute la boule du pointeur de plein fouet avec une vitesse v_2 = 8,0 m.s^{-1}. Les frottements sont négligés.

Dans le référentiel terrestre, après le choc, les deux boules, de masses respectives m_1= 670 g et m_2= 740 g, possèdent les vecteurs vitesse $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ de même direction.



1. Représenter sur le document ci-dessus les deux boules ainsi que les vecteurs vitesse $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ après le choc sans soucis d'échelle. 0,5

2. Exprimer les vecteurs quantité de mouvement du système avant et après le choc. 1,5

3. En faisant apparaitre votre démarche, exprimer puis calculer v_1' sachant que v_2' = 3,0 m/s. 1,5

4. Une étude énergétique et la conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire les relations vectorielles suivantes :

$$\vec{v}_1' = \frac{2 \times m_2}{m_1 + m_2} \times \vec{v}_2 \qquad et \qquad \vec{v}_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \times \vec{v}_2$$

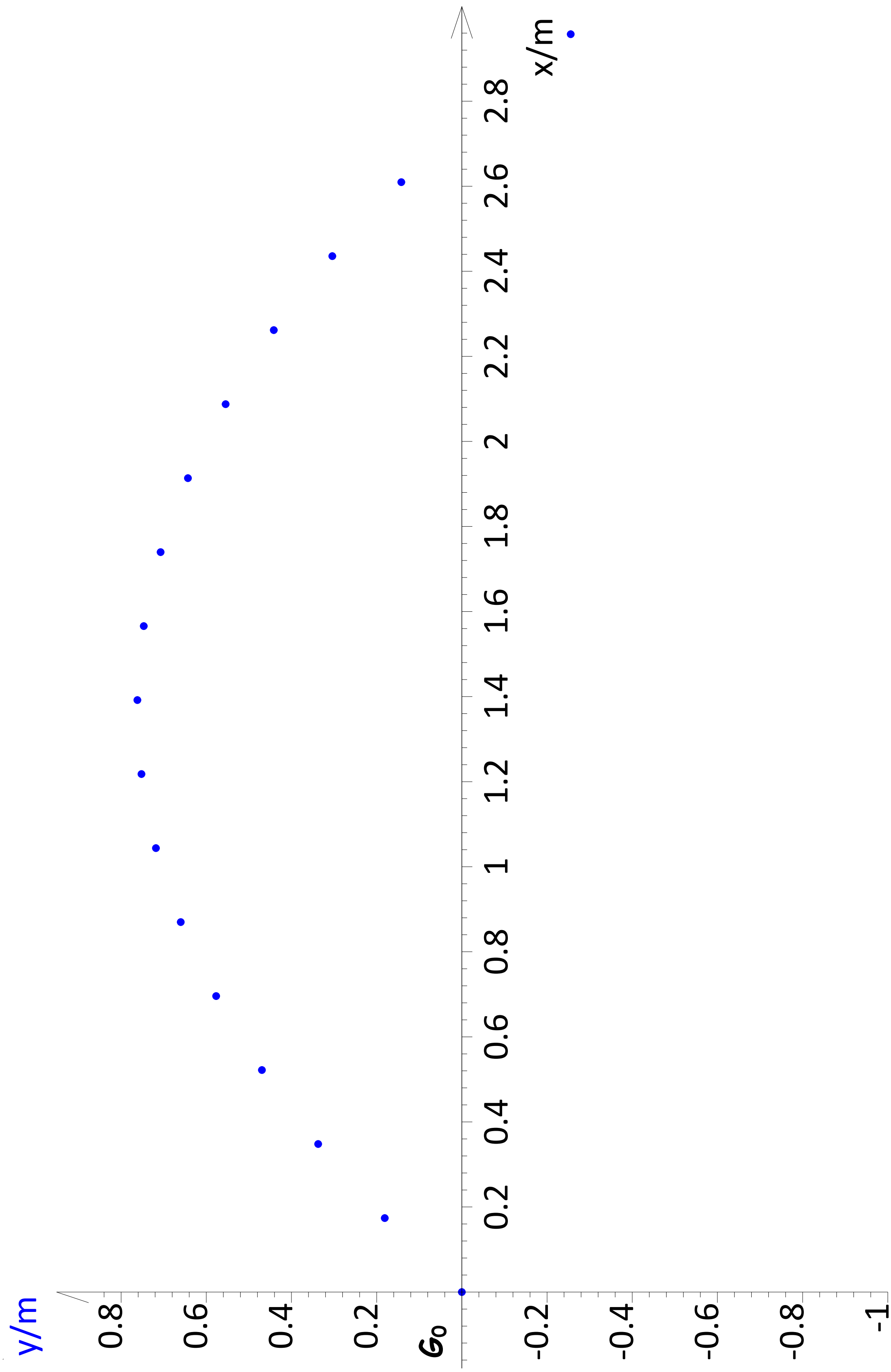
À partir de ces relations vectorielles, associer les relations A, B et C comparant les masses aux trois propositions 1, 2 et 3 : 1,5

$m_1 = m_2$	A
$m_1 > m_2$	B
$m_1 < m_2$	C

1	la boule G_2 repart en sens inverse
2	la boule G_2 suit la boule G_1
3	les boules échangent leurs vitesses

Reporter vos réponses sur votre copie et justifier chaque choix.

5. Que se passe-t-il si la masse m_1 est très largement supérieure à la masse m_2 ? Justifier. 0,5


x/m
y/m
G_0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6
2.8
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1

Correction

A. Étude de la chronophotographie du pointeur

1. échelle de distance : 7,0 cm → 1,0 m

Par définition,

$$\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{G_{i-1}G_{i+1}}}{2\tau}$$

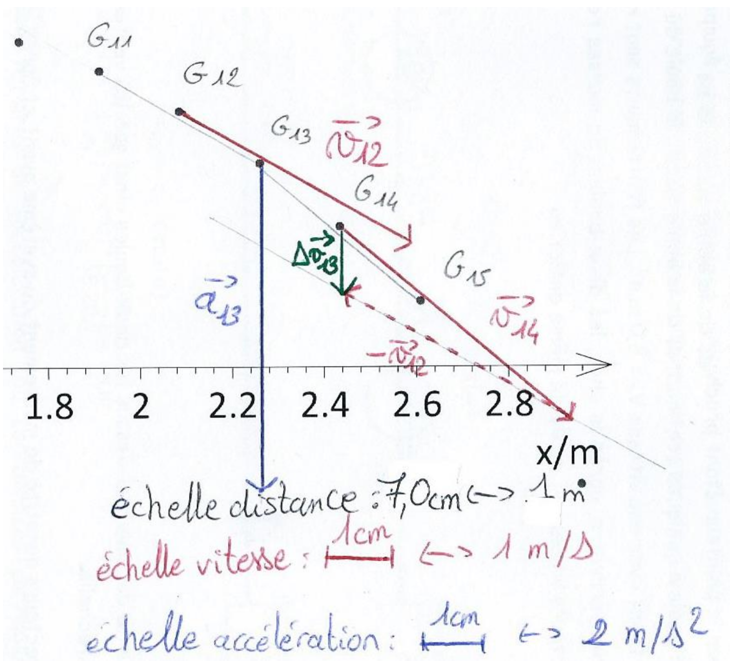
norme du vecteur variation de position au point G_{12}	norme du vecteur variation de position au point G_{14}
$G_{11}G_{13} = \frac{2{,}8 \times 1}{7{,}0} = 0{,}40\ m$	$G_{13}G_{15} = \frac{3{,}2 \times 1}{7{,}0} = 0{,}46\ m$
norme du vecteur vitesse au point G_{12}	**norme du vecteur vitesse au point G_{14}**
$v_{12} = \frac{G_{11}G_{13}}{2\tau} = \frac{0{,}40}{2 \times 50.10^{-3}} = 4{,}0\ m.s^{-1}$	$v_{14} = \frac{G_{13}G_{15}}{2\tau} = \frac{0{,}46}{2 \times 50.10^{-3}} = 4{,}6\ m.s^{-1}$
longueur du vecteur vitesse au point G_{12}	**longueur du vecteur vitesse au point G_{14}**
$\frac{4{,}0}{1{,}0} = 4{,}0\ cm$	$\frac{4{,}6}{1{,}0} = 4{,}6\ cm$

2. Par définition,

$$\vec{a}_{13} = \frac{\Delta\vec{v}_{13}}{2\tau} = \frac{\vec{v}_{14} - \vec{v}_{12}}{2\tau}$$

On construit $\Delta\vec{v}_{13} = \vec{v}_{14} - \vec{v}_{12}$.

longueur du vecteur variation de vitesse au point G_{13}
1,0 cm
norme du vecteur variation de vitesse au point G_{13}
$\Delta v_{13} = 1{,}0 \times 1{,}0 = 1{,}0\ m.s^{-1}$
norme du vecteur accélération au point G_{13}
$a_{13} = \frac{\Delta v_{13}}{2\tau} = \frac{1{,}0}{2 \times 50.10^{-3}} = 10\ m.s^{-2}$
longueur du vecteur accélération au point G_{13}
$\frac{10}{2{,}0} = 5{,}0\ cm$



B. Étude dynamique du pointeur

1. a/ On cherche les équations horaires de la vitesse (ou coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse) :

On sait que :

$$\vec{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}(t)\right)}{\mathrm{dt}}$$

On peut écrire que :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{d\big(x(t)\big)}{dt} = v_0 \times cos(\alpha) \\ v_y(t) = \dfrac{d\big(y(t)\big)}{dt} = -g \times t + v_0 \times sin(\alpha) \end{cases}$$

b/ Norme du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{3{,}48^2 + 3{,}86^2} = 5{,}20\ m.s^{-1}$$

c/ Expression de l'angle α

$$v_{0x} = v_O \times \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v_{ox}}{v_0}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3{,}48}{5{,}20}\right) = 48{,}0°$$

2. a/ On cherche les équations horaires de l'accélération (ou coordonnées cartésiennes du vecteur accélération) :

On sait que :

$$\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}\big(\vec{\mathrm{v}}(t)\big)}{\mathrm{dt}}$$

On peut écrire que :

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{d\big(v_x(t)\big)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{d\left(v_y(t)\right)}{dt} = -g \end{cases}$$

b/ Comparaison du tracé et de l'étude théorique

tracé du vecteur accélération	étude théorique du vecteur accélération
direction verticale	coordonnées uniquement selon l'axe Oy
dirigé vers le bas	a_y est négatif
norme : 10 m/s²	norme : g=9,81 m/s²

c/ Vérification de la 2ème loi de Newton

Système : {boule} (la boule est assimilée à son centre d'inertie G)

Référentiel terrestre supposé galiléen

Le champ de pensateur $\vec{g}$ est supposé constant

$$\vec{g}\begin{pmatrix} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{pmatrix}$$

Une seule force s'exerce sur le système :

- le poids de la boule $\vec{P} = m \times \vec{g}$

$$\vec{P}\begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -m \times g \end{pmatrix}$$

Remarque : Les forces de frottement et la poussée d'Archimède sont négligées

Application de la 2ème loi de Newton

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Nous pouvons appliquer la 2ème loi de Newton (ou le principe fondamental de la dynamique)

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d(\vec{p}(t))}{dt} = \frac{d(m \times \vec{v}(t))}{dt}$$

La masse du système est constante donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \times \frac{d(\vec{v}(t))}{dt} = m \times \vec{a}(t)$$

or $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m \times \vec{g}$

donc $\vec{P} = m \times \vec{g} = m \times \vec{a}(t)$

soit $\boldsymbol{\vec{a}(t) = \vec{g}}$

$$\vec{a}(t) \begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{pmatrix}$$

L'étude précédente vérifie donc la 2ème loi de Newton.

3. a/ On cherche les coordonnées du vecteur vitesse quand la boule est à l'altitude maximale de sa trajectoire à la date t_{sommet}.

À cette date, le vecteur vitesse de la boule est horizontal ce qui implique :

$$\vec{v}(t_{sommet}) \begin{cases} v_x(t_{sommet}) = v_0 \times cos(\alpha) = 5{,}5 \times \cos(51) = 3{,}46\ m/s \\ v_y(t_{sommet}) = -g \times t_{sommet} + v_0 \times sin(\alpha) = 0\ m/s \end{cases}$$

On en déduit que :

$$-g \times t_{sommet} + v_0 \times sin(\alpha) = 0$$

Alors

$$t_{sommet} = \frac{v_0 \times sin(\alpha)}{g} = \frac{5{,}5 \times sin(51)}{9{,}81} = 0{,}44\ s$$

$$\overrightarrow{OG}(t_{sommet}) \begin{pmatrix} x(t_{sommet}) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t_{sommet} = 5{,}5 \times \cos(51) \times 0{,}44 = 1{,}5\ m \\ y(t_{sommet}) = -\frac{1}{2} \times g \times t_{sommet}^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t_{sommet} = -\frac{1}{2} \times 9{,}81 \times 0{,}44^2 + 5{,}5 \times \sin(51) \times 0{,}44 = 0{,}93\ m \end{pmatrix}$$

b/ Équation de la trajectoire

On sait que :

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{pmatrix} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \times g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t \end{pmatrix}$$

On pose :

$$t = \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \times g \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}$$

$$y(x) = -\frac{g}{2 \times {v_0}^2 \times \cos^2(\alpha)} \times x^2 + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times x$$

$$\mathbf{y(x) = -\frac{g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2(\alpha)} \times x^2 + \tan(\alpha) \times x}$$

c/ La boule touche le sol pour y_I = -1,2 m (car O est à 1,2 m au-dessus du sol).

Il faut résoudre le polynôme du second degré en *x* suivant :

$$y_I = -\frac{g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2(\alpha)} \times x_I^2 + \tan(\alpha) \times x_I$$

$$-\frac{g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2(\alpha)} \times x_I^2 + \tan(\alpha) \times x_I - y_I = 0$$

On cherche le discriminant de l'équation du second degré :

$$\Delta = \tan^2(\alpha) - 4 \times \left(-\frac{g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2(\alpha)}\right) \times (-y_f)$$

$$\Delta = \tan^2(51) - 4 \times \left(-\frac{9{,}81}{2 \times (5{,}5)^2 \times \cos^2(51)}\right) \times (- - 1{,}2) = 3{,}5$$

Solutions mathématiques :

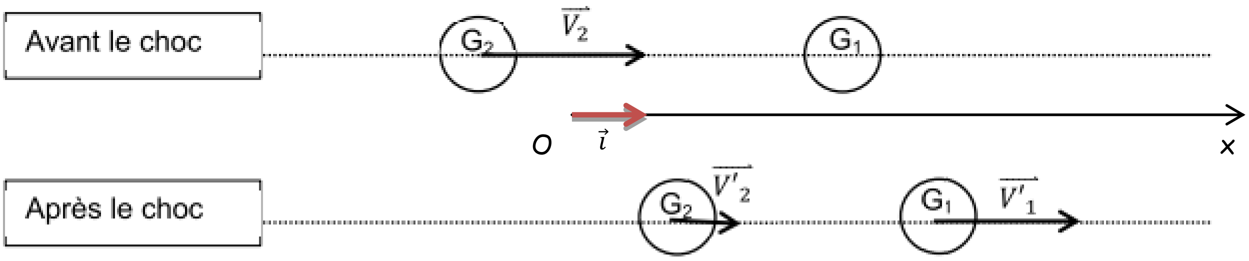
$$x_{I1} = \frac{-\tan(\alpha) - \sqrt{\Delta}}{2 \times \left(-\frac{g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2(\alpha)}\right)} = \frac{-\tan(51) - \sqrt{3{,}5}}{2 \times \left(-\frac{9{,}81}{2 \times (5{,}5)^2 \times \cos^2(51)}\right)} = 3{,}8\, m$$

$$x_{I2} = \frac{-\tan(\alpha) + \sqrt{\Delta}}{2 \times \left(-\frac{g}{2 \times v_0^2 \times \cos^2(\alpha)}\right)} = \frac{-\tan(51) + \sqrt{3{,}5}}{2 \times \left(-\frac{9{,}81}{2 \times (5{,}5)^2 \times \cos^2(51)}\right)} = -0{,}77\, m$$

On garde la racine positive cohérente avec la situation physique donc x_I = 3,8 m.
(cohérent car la boule tombe à 3,8 m puis roule jusqu'au bouchon situé entre 6 et 10 m du pointeur).

C. Le tireur

1.



2. Système : {boule 1 + boule 2}
   Événement : le choc entre les deux boules

   Quantité de mouvement avant le choc :

$$\vec{p}_{avant}(système) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_{avant}(système) = m_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \times \vec{v}_2 = m_2 \times \vec{v}_2 \quad car\ \vec{v}_1 = \vec{0}$$

   Quantité de mouvement après le choc :

$$\vec{p}_{après}(système) = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$\vec{p}_{après}(système) = m_1 \times \vec{v}_1' + m_2 \times \vec{v}_2'$$

3. On considère le système comme pseudo-isolé, on peut donc utiliser la 1ère loi de Newton. ($\vec{p}(t) = \overrightarrow{cte}$)

On peut écrire :

$$\vec{p}_{avant}(système) = \vec{p}_{après}(système)$$
$$m_2 \times \vec{v}_2 = m_1 \times \vec{v}_1' + m_2 \times \vec{v}_2'$$

On projette les vecteurs vitesses sur l'axe (Ox) avec le vecteur unitaire $\vec{\imath}$, on a :

$$m_2 \times v_2 = m_1 \times v_1' + m_2 \times v_2'$$
$$v_1' = \frac{m_2 \times (v_2 - v_2')}{m_1} = \frac{0{,}740 \times (8{,}0 - 3{,}0)}{0{,}670} = 5{,}5\, m.s^{-1}$$

4. D'après les relations vectorielles données :

$$\vec{v}_1' = \frac{2 \times m_2}{m_1 + m_2} \times \vec{v}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \times \vec{v}_2$$

A : si $m_1 = m_2$, alors $\vec{v}_1' = \vec{v}_2$ et $\vec{v}_2' = \vec{0}$: les boules échangent leurs vitesses **(3)**

B : si $m_1 > m_2$, alors :

- $m_1 + m_2 > 2 \times m_2$ donc $\vec{v}_1' = a \times \vec{v}_2$ avec $0 < a < 1$: la boule 1 part vers la droite.
- $m_2 - m_1 < 0$ donc $\vec{v}_2' = b \times \vec{v}_2$ avec $b < 0$: la boule 2 repart vers la gauche. **(1)**

C : si $m_1 < m_2$, alors :

- $m_1 + m_2 < 2 \times m_2$ donc $\vec{v}_1' = c \times \vec{v}_2$ avec $c > 1$: la boule 1 part vers la droite.
- $m_2 - m_1 > 0$ donc $\vec{v}_2' = d \times \vec{v}_2$ avec $d > 0$: la boule 2 continue vers la droite et suit la boule 1. **(2)**

5. si $m_1 \gg m_2$, alors :
   - le terme $\dfrac{2\,m_2}{m_1 + m_2}$ tend vers 0 et donc $\vec{v}_1'$ tend vers $\vec{0}$. La boule 1 ne bouge presque pas.
   - le terme $\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$ tend vers –1 et donc $\vec{v}_2'$ tend vers $-\vec{v}_2$. La boule 2 rebondit et repart vers la gauche avec (quasiment) la même vitesse.